Ecole Nat. Sup. de Géologie NANCY

1992

Avertissement :

- La partie II est indépendante de la partie I. La partie III utilise les résultats des parties I et II.
- Sauf avis contraire donné dans l'énoncé, tout résultat doit être complètement justifié et clairement rédigé pour être pris en compte.
- A condition de le signaler explicitement, le candidat pourra utiliser un résultat en l'admettant, afin de poursuivre la résolution du problème.

Partie I

Sur l'espace probabilisé (Ω,A,P), X est une variable aléatoire discrète de loi binomiale négative d'ordre 1 si :

$$P(X = n) = q.p^{n-1},\ n \in \mathbb{N}^*$$

où p est un nombre donné compris entre 0 et 1, et $q = 1-p$.

1) Une urne contient N boules rouges, et M boules blanches indiscernables au toucher. On procède à une suite infinie de tirages avec remise. Pour l'événement élémentaire ω, $X(\omega)$ désigne le numéro du tirage pour lequel une boule rouge sort pour la première fois.

Expliquer pourquoi X a une loi binomiale négative d'ordre 1, en précisant les valeurs de p et de q.

2) Calculer l'espérance et l'écart-type de X.

3) Déterminer la fonction génératrice G de X.

4) Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes de même loi binomiale négative d'ordre 1.

Déterminer la loi de la variable aléatoire X_1+X_2 :

a) directement,

b) à l'aide de la fonction G.

Partie II

Pour chaque entier n positif ou nul, on pose :

$$P_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

1) Calculer P_0,P_1,P_2.

2) Montrer que P_n est un polynôme et donner son expression développée dans la base des monômes.

3) Montrer que, pour tout couple d'entiers (m,n), l'intégrale généralisée :

$$I_n^m = \int_0^{\infty} e^{-x} P_n(x).P_m(x)dx$$

est absolument convergente.

4) Calculer les intégrales I_1^1 et I_1^2.

5) Montrer que, pour $n > k > 0$ entiers, on a :

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^k P_n(x)dx = -k \int_0^{\infty} x^{k-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left(x^n e^{-x}\right) dx.$$

6) Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{0,1,...,n-1\}$,

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^k P_n(x)dx = 0.$$

7) En déduire que : $I_n^m = 0$ si $n \neq m$.

8) Rappeler le développement en série entière de $\frac{1}{1-z}$, en précisant son rayon de convergence.

En déduire que, pour tout entier positif k, on a :

$$\frac{z^k}{(1-z)^{k+1}} = \sum_{n=k}^{+\infty} C_n^k z^n$$

en précisant le domaine de validité de la formule.

9) **Sans vous soucier de la justification des opérations de permutation dans l'ordre des sommations,** montrer, à l'aide des questions 2) et 8), que :

$$\sum_{n\geq 0} \frac{P_n(x)}{n!} z^n = \frac{1}{1-z} e^{-\frac{xz}{1-z}}$$

10) Vérifier que la fonction

$$\varphi(x,z) = \frac{1}{1-z} e^{-\frac{xz}{1-z}}$$

obéit à la relation :

$$(1-z)^2 \frac{\partial \varphi}{\partial z}(x,z) = (1-z-x)\,\varphi(x,z)$$

11) **En déduire formellement** que, pour tout $n \geq 1$, on a :

$$P_{n+1}(x) = (2n+1-x)\,P_n(x) - n^2\,P_{n-1}(x).$$

12) Pouvez-vous proposer une démonstration rigoureuse de cette formule de récurrence ?

Partie III

Sur l'espace probabilisé (Ω,A,P) , soient $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi binomiale négative d'ordre 1 et ξ une variable aléatoire discrète indépendante des X_k et ayant une loi de Poisson d'espérance λ.

Le but du problème est de déterminer la loi de la variable aléatoire $X = X_1+X_2+\ldots+X_{\xi+1}$ définie par :

$$X(\omega) = X_1(\omega)+X_2(\omega)+\ldots+X_{\xi(\omega)+1}(\omega)$$

pour chaque événement élémentaire ω.

1) Expliquer pourquoi on a, pour tout entier positif n :

$$P(X = n) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X_1+X_2+\ldots X_{k+1} = n).P(\xi = k).$$

2) Montrer que, pour tout couple d'entiers positifs (n,k),

$$P(X_1+X_2+\ldots+X_{k+1} = n) = \frac{1}{n!}\cdot\frac{d^n}{dz^n}\bigg|_{z=0} G^{k+1}.$$

3) Déduire de ce qui précède, **à l'aide d'un calcul formel**, que :

$$P(X = n) = \frac{1}{n!}\cdot\frac{d^n}{dz^n}\bigg|_{z=0} \frac{qz}{1-pz}\; e^{-\lambda\frac{1-z}{1-p.z}}$$

4) Montrer que :

$$P(X = n) = e^{-\lambda}.\,p^{n-1}.q\,\frac{1}{(n-1)!}\,.P_{n-1}\left(-\lambda\,\frac{q}{p}\right).$$

5) Calculer :

$P(X = 4)$

pour $p = \frac{1}{2}$, $\lambda = 1$.